# Topologie Algébrique TD2

7, 14 Octobre 2011

## 2 Espaces Topologiques

**Convention :** Tous les espaces topologiques sont supposés séparés (=Hausdorff).

**Exercice 2.1 (Topologie initiale et topologie finale)** Soit $X$ un ensemble, soit $\{Y_i\}_{i\in I}$ une famille d'espaces topologiques.

(a) Pour tout $i \in I$, soit $f_i : X \to Y_i$ une application. La *topologie initiale sur X définie par* $\{f_i\}_{i\in I}$ est la topologie la moins fine rendant continues les applications $f_i$ pour tout $i \in I$. Autrement dire, c'est la topologie engendré par $\{f_i^{-1}(U_i) : i \in I, U_i \text{ ouvert de } Y_i\}$.

(b) Pour tout $i \in I$, soit $g_i : Y_i \to X$ une application. La *topologie finale sur X définie par* $\{g_i\}_{i\in I}$ est la topologie la plus fine rendant continues les applications $g_i$ pour tout $i \in I$. C'est-à-dire, les ouverts sont les sous-ensembles $U$ de $X$ telles que pour tout $i \in I$, $g_i^{-1}(U)$ soit un ouvert de $Y_i$.

1. **(Sous-espaces)** Soit $A$ un sous-ensemble d'un espace topologique $X$, $\iota : A \to X$ l'inclusion. Décrire la topologie initiale sur $A$ définie par $\iota$.
2. **(Espaces quotients)** Soit $X$ un espace topologique, soit $q : X \to Y$ une application surjective. Décrire la topologie finale sur $Y$ définie par $q$.
3. **(Propriétés universelles)** Dans la situation (a) ci-dessus, montrer qu'une application $\phi : Z \to X$ est continue si et seulement si toute composition $f_i \circ \phi$ est continue, où $Z$ est un espace topologique quelconque, et $X$ est muni de la topologie initiale. Énoncer et vérifier la propriété universelle de la topologie finale dans la situation (b).
4. **(Produits et coproduits dans $\mathfrak{Top}$)** Soit $\{X_i\}_{i\in I}$ une famille d'espaces topologiques. Montrer que sur l'ensemble de produit cartésien $\prod_{i\in I} X_i$, la topologie initiale définie par les projections coïncide avec la topologie produite, et qu'il est le produit dans la catégorie $\mathfrak{Top}$. Faire la même chose pour le coproduit $\coprod_{i\in I} X_i$.
5. **(Limites projectives et inductives dans $\mathfrak{Top}$)** Soit $I$ une catégorie petite, soit $X : I \to \mathfrak{Top}$ un foncteur. Montrer que la limite projective de $X$ dans $\mathfrak{Top}$ est la limite projective dans la catégorie des ensembles $\varprojlim_{i\in I} X_i$, munie de la topologie initiale définie par les projections naturelles
$$p_j : \varprojlim_{i\in I} X_i \to X_j.$$
Construire la limite inductive dans $\mathfrak{Top}$ d'un foncteur $X : I \to \mathfrak{Top}$ par la procédure duale.

**Terminologies** : Dans la catégorie $\mathfrak{Top}$, on souvent appelle la limite projective *la limite*, et la limite inductive *la colimite*.

6. **(Compacité)** On rappelle que le théorème de Tychonoff qui affirme qu'un produit d'espaces topologiques compacts est compact.
(a) Montrer que l'anneau des *entiers p-adique*
$$\mathbf{Z}_p := \varprojlim_{n\in\mathbf{N}_+} \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}$$
muni la topologie initiale[1] est compacte.
(b) Soit $k$ un corps. On fixe une clôture séparable $k^s$, montrer que le groupe de Galois *absolu* de $k$
$$\mathrm{Gal}(k^s/k) := \varprojlim_{L/k \text{ finie galoisienne}} \mathrm{Gal}(L/k)$$
muni de la topologie initiale[2] est compact.

**Exercice 2.2 (Topologie Compacte-ouverte)** Soient $X$ et $Y$ deux espaces topologiques, on note $\mathrm{Mor}_{\mathfrak{Top}}(X, Y)$ l'ensemble des applications continues de $X$ vers $Y$. Pour toute partie compacte $K$ de $X$ et tout ouvert $U$ de $Y$, on définit un sous-ensemble de $\mathrm{Mor}_{\mathfrak{Top}}(X, Y)$ suivant :
$$W(K, U) := \{f \in \mathrm{Mor}_{\mathfrak{Top}}(X, Y) : f(K) \subset U\}.$$
Alors on appelle la topologie *compacte-ouverte* sur $\mathrm{Mor}_{\mathfrak{Top}}(X, Y)$ la topologie engendrée par la sous-base $\{W(K, U)\}_{K,U}$. Notons $\mathrm{Map}(X, Y)$ l'espace topologique ainsi construit.
**Notation :** On appelle $\mathrm{Map}(X, Y)$ le $\mathrm{Mor}$ *interne*, la notations $Y^X$ est aussi souvent utilisée.
Soient $X$, $Y$, $Z$ trois espaces topologiques.

1. Si $f : X \times Y \to Z$ est une application continue, montrer que l'application 'adjointe'
$$\begin{array}{rcl}\phi : X & \to & \mathrm{Map}(Y, Z) \\ x & \mapsto & (y \mapsto f(x, y))\end{array}$$
est continue.
2. Si $X$ est *localement compact*, montrer que l'application d'évaluation $X \times \mathrm{Map}(X, Y) \to Y$ est continue.
3. **(Adjonction)** Si $Y$ est *localement compact*, montrer qu'il existe un homéomorphisme
$$\mathrm{Map}(X \times Y, Z) \simeq \mathrm{Map}(X, \mathrm{Map}(Y, Z)).$$
En particulier, on a une bijection naturelle
$$\mathrm{Mor}_{\mathfrak{Top}}(X \times Y, Z) \simeq \mathrm{Mor}_{\mathfrak{Top}}(X, \mathrm{Map}(Y, Z)).$$
En déduire une paire de foncteurs adjoints.

1. Les groupes finis $\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}$ sont sous-entendus munis de la topologie discrète.
2. Les groupes finis $\mathrm{Gal}(L/k)$ sont sous-entendus munis de la topologie discrète.

**Exercice 2.3 (Opérations)** On va présenter plusieurs opérations qui permettent de construire de nouveaux espaces topologiques pointés à partir d'anciens. Par convention, on omet souvent les points bases dans les notations suivantes.

(a) **(Bouquet)** Soit $(X_i, x_i)_{i\in I} \in \mathfrak{Top}_\bullet$ une famille d'espaces pointés. On rappelle que le *bouquet* de cette famille est construit comme :

$$\bigvee_{i\in I} X_i := \coprod_{i\in I} X_i / \sim,$$

où la relation d'équivalence est $x_i \sim x_j$ pour tout $i, j \in I$.

(b) **(Smash)** Soient $(X, x)$, $(Y, y)$ deux espaces topologiques pointés. On définit le *produit smash* par :

$$X \wedge Y := X \times Y / X \vee Y,$$

où on identifie $X \vee Y$ au sous-espace $X \times \{y\} \cup \{x\} \times Y$ dans $X \times Y$.

(c) **(Suspension réduite)** Soit $(X, x)$ un espace topologique pointé, on appelle l'espace suivant la *suspension réduite* de $X$ :

$$\sum X := \mathbb{S}^1 \wedge X,$$

où on prend n'importe quel point de $\mathbb{S}^1$, par exemple 1, comme son point base.

(d) **(Espace des lacets)** Si on se donne un espace topologique pointé $(X, x)$, *l'espace des lacets* de $(X, x)$, noté $\Omega X$, est par définition $\mathrm{Map}_\bullet(\mathbb{S}^1, X)$, c'est-à-dire l'ensemble des applications continues pointées de $(\mathbb{S}^1, 1)$ vers $(X, x)$ muni de la topologie compacte-ouverte.

1. Préciser les points bases sur les espaces construits ci-dessus.
2. Vérifier que ces opérations sont bien des foncteurs.
3. Montrer que le bouquet d'une famille d'espaces topologiques pointés est le coproduit de cette famille dans la catégorie $\mathfrak{Top}_\bullet$.
4. **(Adjonction $(\wedge, \mathrm{Map}_\bullet)$)** Soient $(X, x)$, $(Y, y)$, $(Z, z)$ trois espaces topologiques pointés, comme dans l'exercice précédent, on peut définir le $\mathrm{Mor}_{\mathfrak{Top}_\bullet}$ *interne*, noté $\mathrm{Map}_\bullet(-, -)$, comme l'ensemble des applications continues *préservant les points bases*, muni de la topologie compacte-ouverte. Si on suppose de plus que $Y$ est *localement compact*. Montrer qu'on a un homéomorphisme :

$$\mathrm{Map}_\bullet(X \wedge Y, Z) \simeq \mathrm{Map}_\bullet(X, \mathrm{Map}_\bullet(Y, Z)).$$

En déduire une paire de foncteurs adjoints.

5. **(Adjonction $(\sum, \Omega)$)** Établir l'homéomorphisme suivant :

$$\mathrm{Map}_\bullet(\sum X, Y) \simeq \mathrm{Map}_\bullet(X, \Omega Y).$$

On en déduire une paire de foncteurs adjoints.

6. **(Distributivité)** Soient $(X, x)$, $(Y, y)$, $(Z, z)$ trois espaces topologiques pointés, on suppose de plus que $X$ est *localement compact*. Établir les distributivités suivantes :

$$X \wedge (Y \vee Z) \simeq (X \wedge Y) \vee (X \wedge Z).$$

$$\sum (Y \vee Z) \simeq (\sum Y) \vee (\sum Z).$$

(Indication : on pourrait utiliser l'adjonction qu'on a établi.)

7. **(Associativité)** Soient $(X, x)$, $(Y, y)$, $(Z, z)$ trois espaces topologiques pointés, on suppose de plus qu'ils sont localement compacts. Montrer qu'on a l'associativité :

$$(X \wedge Y) \wedge Z \simeq X \wedge (Y \wedge Z).$$

Par conséquent, on peut définir le smash produit au moins pour un nombre fini d'espaces pointés :

$$\bigwedge_{i \in I} X_i := \prod_{i \in I} X_i / \bigvee_{i \in I} X_i,$$

où on identifie $\bigvee_{i \in I} X_i$ à un sous-espace de $\prod_{i \in I} X_i$ défini par les inclusions des points bases.

8. Pour tout entier positif $n \in \mathbf{N}$. Montrer l'homéomorphisme

$$\sum \mathbb{S}^n := \mathbb{S}^1 \wedge \mathbb{S}^n \simeq \mathbb{S}^{n+1}.$$

En déduire :

$$\mathbb{S}^n \wedge \mathbb{S}^m \simeq \mathbb{S}^{m+n}.$$